

1998 年度 入学試験 物理専門科目

専攻 問題 1

井戸型ポテンシャルの中に置かれた電子系の運動を考える。電子の運動は x 軸方向のみ考えればよく、それに直行する方向の運動は考えない。ポテンシャルは $-a < x < a$ (a は正の定数) で 0 で、 $x = -a$ および $x = +a$ に無限に高い壁をもつ。 i 番目 ($i = 1, 2, \dots$) の電子の座標を x_i とし、そのスピンを \vec{s}_i と表わす。またその電子のスピンの波動関数については、上向きを $u_{\uparrow}(i)$ 、下向きを $u_{\downarrow}(i)$ とする。電子の質量を m として、以下の設問に答えよ。

1. 1 個の電子をこの井戸型ポテンシャルの中に入れた時のエネルギー固有値を求めよ。ただし、下から n 番目 ($n = 1, 2, \dots$) のものを E_n とせよ。
2. 電子はフェルミ粒子である。この事実は、この井戸型ポテンシャル内に 2 個の電子を入れた時に、それらの波動関数にどのような条件を課すか、述べよ。
3. 2 個の電子をこの井戸型ポテンシャル内に入れたところ、最も低いエネルギー固有状態が実現された。この時のエネルギー固有値を求め、その状態での電子系の波動関数を、スピン部分まで含めて示せ。さらに、電子の合成スピン演算子

$$\vec{S} = \vec{s}_1 + \vec{s}_2$$

に対して、この状態での $(\vec{S} \cdot \vec{S})$ の期待値を求めよ。以後 (\cdot) は内積を表わす。

4. 設問 3 と同じ場合で、2 番目に低いエネルギー固有状態が実現されていたとする。このエネルギー固有値に属する系の固有状態には、どのようなものがあり得るか。スピン部分まで含め、それらの波動関数を示せ。
5. ここで電子間に

$$V = f \times (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) \times \delta(x_1 - x_2)$$

という相互作用が働くとする。ただし f は結合定数で、十分に小さい正の値をとるものとし、 $\delta()$ はデルタ関数を表わす。この相互作用が加わったとき、設問 3 で求めた状態のエネルギー固有値の変化を計算せよ。

6. 設問 5 の相互作用 V が働いたとき、設問 3 の状態と、設問 4 で考えた状態 (複数でもよい) は、どのように混ざるか答えよ。

専攻 問題 2

一様な磁場の中に置かれた強磁性体の、次のような模型を考える。

3次元立方格子の各格子点 i に磁気モーメント σ_i が存在し、その磁場方向の成分は、 $\sigma_i = +1$ または $\sigma_i = -1$ の離散的な値をとる。隣り合う格子点 i, j の磁気モーメントは、相互作用のエネルギー $-J\sigma_i\sigma_j$ (J は正の定数) を持つ。磁場を h とするとき、系のハミルトニアンは、

$$H = -J \sum_{(i,j)} \sigma_i \sigma_j - h \sum_i \sigma_i$$

で与えられる。ここで和 (i, j) は最近接の格子点の間のみをとるものとし、3次元立方格子のサイズは十分に大きいものとする。

1. 系の温度を T として、以下の問に答えよ。
 - (i) $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ の極限における、系の磁気モーメントの配位の様子を述べよ。
 - (ii) 同じく $T \rightarrow 0$ および $T \rightarrow \infty$ の極限における、1格子点あたりのエントロピーを求めよ。
 - (iii) (i) の結果を、自由エネルギー $F(T)$ の振る舞いにより説明せよ。
2. 磁気モーメントの熱力学的平均を近似的に求める (厳密解は求められていない)。そのため、原点の磁気モーメント σ_0 とその最近接格子点の磁気モーメントからなる部分系を考え、そのハミルトニアンを $H(\sigma_0)$ とする。
 - (i) $H(\sigma_0)$ において、原点以外の格子点の磁気モーメントを近似的に定数 m で置き換える。このとき、 $H(\sigma_0)$ によって決まる、磁気モーメントの熱力学的平均 $\langle \sigma_0 \rangle$ を求めよ。
 - (ii) $\langle \sigma_0 \rangle$ を m に等しいと置く事により、 m の満たす方程式を求めよ。
 - (iii) 磁場が 0 (すなわち $h = 0$) のとき、 m を温度 T の関数として定性的にグラフに書け。ここで設問 1 (i) の結果を考慮すること。
 - (iv) $m(T)$ が特異点となる温度 T_c を求めよ。

専攻 問題 3

Maxwell は、いくつかの実験事実から 4 つの方程式 (Maxwell 方程式)

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \dots (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad \dots (2)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (3)$$

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \dots (4)$$

を与え、電磁気学を完成させた。ただし \vec{E} は電場、 \vec{B} は磁束密度、 ρ は電荷密度、 \vec{j} は電流密度、 ϵ_0 は真空の誘電率、 μ_0 は真空の透磁率で、以下では真空中の電磁場のみを考える。

1. 式 1 は Gauss の法則を表す。

- (i) 閉じた中空の導体があると、導体の外部にある電荷が作る電場は、導体に囲まれた中空の導体には侵入できない。このことを、式 1 を用いて証明せよ。ただし、中空の空間には、もともと電荷は存在しなかったものとする。
- (ii) R_1 および $R_2 (R_1 > R_2)$ の半径をもつ 2 個の同心の中空導体球を用いて、Gauss の法則を実験的に検証したい。原理的にどのような手順で何を測定すれば良いか、答えよ。

2. Maxwell 方程式から電磁波の存在が预言される。

- (i) 電荷の保存則を用いて、Ampère の法則、すなわち、「ある閉曲線が囲む定常電流 I によって生じる磁場 \vec{B}/μ_0 をその閉曲線に沿って線積分すると、 I に等しい」を非定常電流の場合に一般化し、式 4 を導け。
- (ii) ある瞬間に電流密度 \vec{j} が局所的に発生し、短時間で消滅したとする。その後の \vec{B} と \vec{E} はどのように変動するか。式 3 と 4 を用いて、直観的に説明せよ。
- (iii) 電荷や電流の分布が無い場合、真空中を伝播する電磁波が存在することを導け。またその速度を、設問に与えられた量を用いて示せ。

3. 適当なスカラー場 (スカラーポテンシャル) ϕ とベクトル場 (ベクトルポテンシャル) \vec{A} を導入することにより、

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

と表せることを示せ。

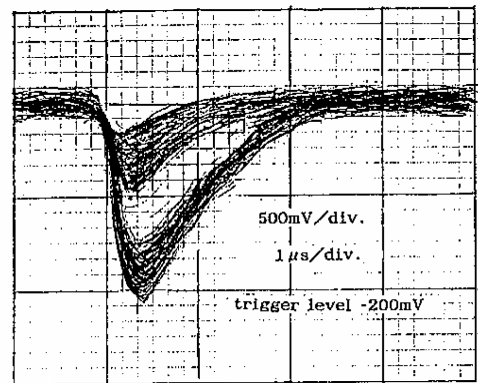
専攻 問題 4

電磁波は光速で伝わる波でありながら、粒子（光子）としても振る舞う。波長（またはエネルギー）帯によって、電磁波はいくつかの異なる名前と呼ばれ、またその検出法も異なる。

1. 下の表にある A、B、C それぞれの電磁波（光子）について、対応する波長、周波数、エネルギーなどを求め、空欄を埋めた表を解答用紙に記せ。ただし、プランク定数は $h = 4 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{sec}$ 、光速は $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ とする。

	波長	周波数	エネルギー	名称
A		80 MHz		
B	500 nm			
C			100 keV	

2. 上の B 付近の周波数帯の光子を発生する現象を 1 つ挙げ、その基本過程を簡単に説明せよ。
3. 実験室に、C のエネルギーを持った光子をランダムに発生する微弱な源がある。この光子を検出し、そのエネルギーを精度よく測定したい。この実験の全体の構成と、その中心となる検出器の原理を、図を用いて説明せよ。
4. 上の実験あるいは他の精密測定を行なおうとしたところ、同じ建物のどこかから来る、A の付近の周波数を持った電磁波が、どうやらノイズとなって精密な測定を困難にしてるらしい。この電磁波の源をなるべく早くつきとめたい。物理系の実験室によくあるような装置、あるいは簡単に製作または借用できるような道具だてを使って、この電磁波の源がどこにあるか探し出すような方法を考案し、説明せよ。複数の方法が考えられれば、それらを説明せよ。
5. この源をつきとめたところ、それを停止または撤去することは不可能とわかった。この状況でなお、目的とする精密測定を実験室で行なうには、どのような対策を施せばよいか。具体的な方法と原理を説明せよ。
6. 設問 5 で施した対策が効き、この電磁波からのノイズは抑えられた。そこで設問 3 の実験を再開したが、まだエネルギーの精密測定が困難であった。検出器からの信号をオシロスコープで多数重ねて見たところ、図のスケッチのように見えた。本来どのように見えるべきか、解答用紙にスケッチを示せ。またこの問題を引き起こしている原因として、どのようなものが考えられ、どんな対策がありうるか、列挙せよ。



図：オシロスコープで見た信号波形。

専攻 問題 5

1. 金属の内部に電場 \vec{E} が存在すると、 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ に従う電流密度 \vec{j} が生じる。ここで σ は導電率である。しかし $\vec{E} = 0$ の場合にも、金属内部の温度 T に勾配 $\text{grad } T$ が存在すると電子は高温部から低温部へ流れ、そのとき生じる電流密度は、 $\vec{j}_{th} = \kappa \sigma \text{grad } T$ と表される。この電流は熱電流、係数 κ は熱電能と呼ばれる。 κ は金属の種類ごとに異なるが、近似的には温度によらない定数とみなせる。以下の設問に答えよ。
 - (i) 1 種類の金属導線の両端に温度差 ΔT を与えても、持続的な電流は流れず、その代わりにその両端に熱起電力と呼ばれる電位差 ΔV が発生する。このときの ΔV と ΔT の関係を求めよ。また、この熱起電力が発生する理由を、電子の挙動を念頭において定性的に説明せよ。
 - (ii) 種類の異なる金属 (M と N) の導線を用いて図 1 のような閉回路を作り、それらの金属の接合部 P_1 と P_2 に温度差を与えると、この閉回路には持続的な電流が発生する。その理由を定性的に説明せよ。
2. 図 1 のような閉回路は、熱電対と呼ばれ、温度測定の素子として広く使われている。この素子を使った温度の測定法について、以下の設問に答えよ。
 - (i) 図 1 の点 Q に、図 2 で示す回路の端子 Q 1、Q 2 を挿入することで、 P_1 と P_2 の温度差を精度よく測定できる。ここで R は抵抗値の大きな標準抵抗、VR は可変抵抗、E は電池、G は検流計、A は電流計である。いま、 P_1 を試料に接触させた状態で、VR を変化させて検流計を流れる電流をゼロに調整した。このとき電流計にながれる電流の値から、試料の温度と P_2 における温度との差が求められる。この測定法の原理と利点を述べよ。ただし、金属 M と N の組み合わせに対して、熱起電力と温度差との関係は既知とせよ。
 - (ii) いま、以上の方法で試料の絶対温度を求めたい。どうすればよいか、要点を概念図に基づいて説明せよ。
 - (iii) こうして測定した試料の温度の正しさを左右すると考えられる要因を列挙せよ。

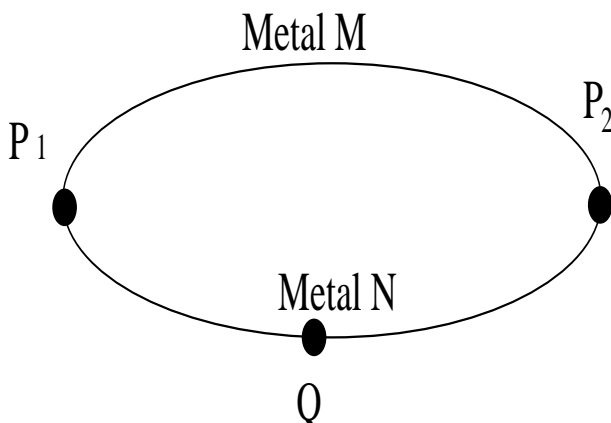


図 1 : 熱電対の概念図。

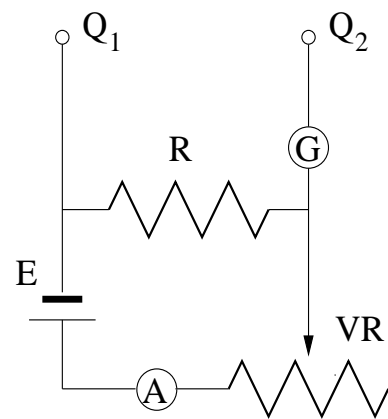


図 2 : 熱起電力の測定系の回路図。

専攻 問題 6

真空中では点電荷の間の静電相互作用はクーロンの法則に従うので、互いに 3\AA 離れた一価の電荷の間には、約 460 kJ/mol ($= 110\text{ kcal/mol}$) もの静電エネルギーが働く。しかし核酸やタンパク質などの生体分子は水中に存在するので、() のために、静電エネルギーは真空中の約 $1/80$ に減少する。また生理的条件下では、水中に多くの電解質イオンが存在するため、静電ポテンシャルはこれらの遮蔽効果により、さらに減少する。Debye-Hückel の理論によれば、このようなイオンの遮蔽効果を考慮したとき、位置 r における静電ポテンシャル $\phi(r)$ は

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_i n_i Z_i q \cdot \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right] \quad \dots (1)$$

で与えられる。ここに和は異なるイオン種についてとるものとし、 ε は電解質溶液の誘電率、 q は素電荷、 k は Boltzmann 定数、 T は絶対温度、そして n_i と Z_i はそれぞれ第 i 種イオンの濃度 (数密度) と電荷数 (イオン価) を表す。以下の問いに答えよ。

1. 上の () の中を埋めよ。
2. 上の式 (1) は、Poisson-Boltzmann の方程式と呼ばれる。この式はどのようにして導かれるかを説明せよ。
3. 静電エネルギーが熱エネルギーよりも十分に小さいときは、式 (1) は線形微分方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = \kappa^2 \phi(r) \quad \dots (2)$$

で表されることを示せ。ただし $\kappa^2 \equiv (q^2/\varepsilon kT) \sum_i n_i Z_i^2$ とする。

4. 原点に電荷数 Z_0 の中心イオンをおき、他のイオンはその周りに球対称に分布していると仮定したとき、式 (2) の解を求めよ。またイオン濃度をゼロに近づけたとき、その解はどのようになるか。ただし、各イオンの大きさは無視できるほど小さいとする。
5. 設問 4 で、イオン濃度がゼロのときの静電ポテンシャルを $\phi_0(r)$ とする。 $\phi(r)$ が $\phi_0(r)$ の $1/e$ ($e = 2.7183\dots$) となるときの r を Debye 長 (またはイオン雰囲気の高さ) という。温度が 25°C で、イオン強度 ($= \frac{1}{2} \sum_i n_i Z_i^2$) が生理的条件下の値 $8.4 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$ ($= 0.14 \text{ mol/liter}$) に等しい電解質の Debye 長を求めよ。ただし水溶液の誘電率を $\varepsilon = 7.0 \times 10^{-10} \text{ Fm}^{-1}$ とし、 $q = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ および $k = 1.38 \times 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$ を、用いてよい。
6. 二本の鎖よりなる DNA は、負に帯電したリン酸基をもち、リン酸基どうしの間隔は約 10\AA である。これらの電荷が水溶液中のイオンにより遮蔽されることは、DNA の二重螺旋構造を安定化する上で重要である。いま DNA 水溶液中のイオン強度を生理的条件下の値よりさらに小さくしていったとき、DNA が熱融解する温度は、どのように変化すると期待されるか。理由を付して述べよ。
7. 簡単な Debye-Hückel の理論だけでは、核酸やタンパク質など生体分子のもつ立体構造の安定性を、定量的に説明できないことが知られている。これらの生体分子の立体構造安定性に大きく寄与している他の要因を二つ以上あげ、それらについて知るところを述べよ。

専攻 問題 7

高分子の稀薄溶液をごく少量だけ、試験管に入れた溶媒の上に静かに積層する。高分子は重力により試験管の底に向かって沈降を始めるが、十分に時間がたつと、試験管内の全体に一樣な濃度で分布するようになる。これは高分子が熱運動する溶媒分子との衝突により、重力よりはるかに大きな揺動力を受けるためである。しかし、試験管を高速に回転するなどして、実効的に重力加速度の大きさを非常に大きくすると、高分子の濃度分布は一樣ではなくなり、試験管の上部では薄く、底部では濃くなる。この現象から、高分子の分子量を求めることができる。問題を簡単にするために、一定で強い実効重力加速度 g が鉛直下向きに働くとして、以下の設問に答えよ。ただし高分子は球形をもつとし、高分子の分子量を M 、アボガドロ数を N_A をとする。

1. まず最初に、熱運動する溶媒分子との衝突により高分子が受ける揺動力を無視した場合を考える。
 - (i) 個々の高分子には、重力、浮力、およびストークスの法則による速度に比例した粘性抵抗力（比例定数 β ）が働く。1個の高分子に対する運動方程式を求めよ。ただし、注目している高分子の液面からの距離 x を（下向きを正とする）、比容（単位質量の物体が占める体積）を V 、溶媒の密度を ρ とする。また稀薄溶液であることから、注目している高分子が他の高分子から受ける浮力は無視できる。
 - (ii) 粘性抵抗力が大きいため、高分子は一定の速度 s で試験管の底部に向かって沈降する。沈降速度 s を求めよ。
2. 次に、揺動力も考慮した場合を考える。この場合、高分子は重力により沈降すると同時に、揺動力により拡散する。拡散により単位時間に単位面積を法線方向に通過する高分子の数は、その方向の濃度勾配の大きさに比例する。その比例定数が高分子の拡散定数 D である。
 - (i) 液面から x の距離にある水平な単位面積を、試験管の上部から底部に向かって単位時間に通過する高分子の数 $j(x, t)$ を求めよ。ただし、 x の位置での高分子の濃度は $C(x, t)$ である。
 - (ii) 高分子の濃度 $C(x, t)$ の時間変化とその流れ $j(x, t)$ との関係を求めよ。
 - (iii) 設問 (i),(ii) の結果から、高分子の沈降現象を記述する方程式を求めよ。
 - (iv)十分に時間が経つと、試験管内での高分子の濃度分布は時間に依存しない定常状態に達する。その理由を定性的に説明せよ。
 - (v) 定常状態に達したとき、 $x = x_1$ での濃度 C_1 と $x = x_2$ での濃度 C_2 の比 C_1/C_2 を測定すると、沈降速度と拡散定数の比 s/D が求められることを示せ。
 - (vi) 拡散定数 D と粘性係数 β は、アインシュタインの関係式 $D = k_B T / \beta$ で結ばれている。ただし k_B はボルツマン定数、 T は溶液の温度である。 s/D から生体高分子の分子量 M が求められることを示せ。

専攻 問題 8

金属中の電子には、固体内をほぼ自由に動き回る価電子と、原子核近傍に局在する内殻電子がある。このうち価電子の状態を、自由電子模型により近似する。温度が十分低いとして、以下の問いに答えよ。

1. 価電子の状態を特徴づける物理量に、フェルミエネルギー ϵ_F がある。自由電子模型において、 ϵ_F がどのような物理的理由で決まるかを説明し、 ϵ_F と電子密度 n の関係式を導け。
2. ナトリウム (Na) の ϵ_F を eV 単位で概算せよ。ただし一価金属である Na (平均原子量 23) の比重は 0.97 であり、計算には以下の数値を用いても良い。

$$\frac{\hbar^2}{me^2} = 0.529 \text{ \AA} \quad \frac{me^4}{\hbar^2} = 27.2 \text{ eV}$$

ここで m, e はそれぞれ電子の質量と素電荷である。また、アボガドロ数は $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ である。

適当な入射エネルギーで金属固体に打ち込まれた陽電子は、短時間に運動エネルギーを失って静止した後、電子と対消滅を起こす。このとき放出される 2 個の光子 (γ 線) の角度分布から、価電子の運動量分布についての情報が得られる。以下では、この陽電子消滅実験の原理について考えよう。

3. 陽電子が金属中で運動エネルギーを失う理由として、どのようなものが考えられるか。重要と思われる理由を 3 つあげよ。
4. 静止した陽電子が速さ v の電子と対消滅する場合、2 つの光子は重心系では正反対の方向に放出されるが、実験室系では 180 度から $\Delta\theta$ だけずれた方向に放出される。重心系で電子の初速度方向と光子 (光速を c とする) の放射方向のなす角を θ としたとき、 $v, \Delta\theta, \theta$ の関係式を、 $\frac{v}{c} (\ll 1)$ の 1 次の精度で求めよ。
5. $\Delta\theta$ を測定することによって、金属のフェルミエネルギーを知ることが出来る。その理由を説明せよ。
6. 実際の金属には内殻電子もあるが、金属中に陽電子を打ち込んで、上の方法で内殻電子に関する情報を得ることは難しい。その理由を簡単に説明せよ。

専攻 問題 1 解答

1. Schrödinger 方程式

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) = E\psi(x) \quad (|x| < a)$$

$$\psi(a) = \psi(-a) = 0$$

を解けばいい。解は、 $n=1,2,\dots$ として、

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & n : \text{奇数} \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2a}\right) & n : \text{偶数} \end{cases}$$

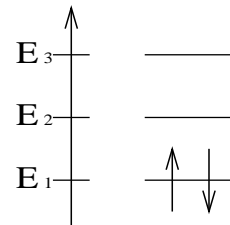
$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{8ma^2}$$

となる。

2. 「電子の入れ換えに対し、波動関数が反対称である」という条件。

3. 右図のように下から 2 つの電子をつめればエネルギー固有値最小。

$$E_{total} = E_1 + E_1 = \frac{\hbar^2 \pi^2}{4ma^2}$$



さて、波動関数は軌道の波動関数とスピンの波動関数との積であり、 $\psi_{total}(1,2) = \psi_{orbit} \psi_{spin}$ のようにかく。今は、

$$\psi_{orbit} = \psi_1(x_1)\psi_1(x_2) = \frac{1}{a} \cos\left(\frac{\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2a}\right)$$

で、電子の入れ換えに対し対称である。すると設問 2 の条件から ψ_{spin} は反対称でなくてはならない。よって、

$$\psi_{spin} = \frac{1}{\sqrt{2}} [u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)]$$

とわかる。

まとめると、

$$\psi_{total}(1,2) = \frac{1}{a} \cos\left(\frac{\pi x_1}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi x_2}{2a}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} [u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)]$$

さて、合成スピン (大きさ S 、 z 成分 S_z) の波動関数は、

	$S = 1(\text{対称})$	$S = 0(\text{反対称})$
$S_z = 1$	$u_{\uparrow}(1)u_{\uparrow}(2)$	
$S_z = 0$	$\frac{u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2) + u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)}{\sqrt{2}}$	$\frac{u_{\uparrow}(1)u_{\downarrow}(2) - u_{\downarrow}(1)u_{\uparrow}(2)}{\sqrt{2}}$
$S_z = -1$	$u_{\downarrow}(1)u_{\downarrow}(2)$	

表 1: 合成スピンの波動関数

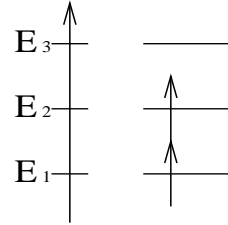
なので、今の ψ_{spin} は $S = 0, S_z = 0$ の固有関数。

$$S^2 \psi_{total}(1,2) = 0(0+1) \psi_{total}(1,2) = 0$$

より、

$$\langle S^2 \rangle = 0$$

4. たとえば右図のように E_1 の所に電子 1 つ、 E_2 の所に電子 1 つのときである。 ψ_{total} が反対称になるために、 ψ_{orbit} が対称で ψ_{spin} が反対称となるか、 ψ_{orbit} が反対称で ψ_{spin} が対称とならなければならない。 ψ_{spin} の対称性の可能性は表 1 のようであるので、あり得る ψ_{total} は次の 4 つとなる。



$$\begin{aligned} \psi(2a, 1, 1) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]u_\uparrow(1)u_\uparrow(2) \\ \psi(2a, 1, 0) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]\frac{1}{\sqrt{2}}[u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) + u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)] \\ \psi(2a, 1, -1) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]u_\downarrow(1)u_\downarrow(2) \\ \psi(2s, 0, 0) &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]\frac{1}{\sqrt{2}}[u_\uparrow(1)u_\downarrow(2) - u_\downarrow(1)u_\uparrow(2)] \end{aligned}$$

ここで、 $\psi(*\#,*,*)$ の第一引数は系のエネルギーが下から * 番目で軌道部分の対称性が#(a は反対称、s は対称)をあらわし、第二引数は $S = *$ 、第三引数は $S_z = *$ をあらわす。

5. 設問 3 でもとめた $\psi_{total}(1, 2)$ は設問 4 の記法で $\psi(1s, 0, 0)$ とかける。

$$S_1^2\psi(1s, 0, 0) = S_2^2\psi(1s, 0, 0) = \frac{3}{4}\psi(1s, 0, 0)$$

$$S^2\psi(1s, 0, 0) = 0$$

であるので、

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \psi(1s, 0, 0) = -\frac{3}{4}\psi(1s, 0, 0) \quad \dots (1)$$

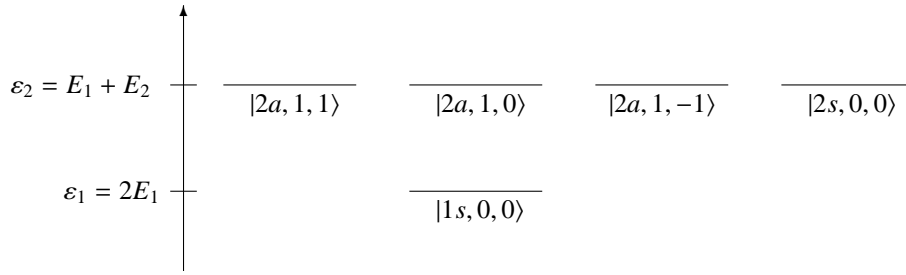
ここで $S^2 = (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \cdot (\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) = S_1^2 + S_2^2 + 2\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2$ より、

$$\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 = \frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2}$$

となることをもちいた。

$V = f\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 \delta(x_1 - x_2)$ という摂動がかかったときの $\psi(1s, 0, 0)$ のエネルギー固有値の 1 次の変化 ΔE_{total} は

$$\begin{aligned} \Delta E_{total} &= \langle 1s, 0, 0 | V | 1s, 0, 0 \rangle \\ &\stackrel{(1)}{=} -\frac{3}{4}f \langle 1s, 0, 0 | \delta(x_1 - x_2) | 1s, 0, 0 \rangle \\ &= -\frac{3}{4}f \int dx_1 dx_2 \psi_1(x_1)^2 \psi_1(x_2)^2 \delta(x_1 - x_2) \\ &= -\frac{3}{4}f \int_{-a}^a dx \psi_1(x)^4 \\ &= -\frac{3}{4}f \frac{1}{a^2} \int_{-a}^a dx \cos^4\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \\ &= -\frac{9f}{16a} \end{aligned}$$



6.

以上 5 つの状態ベクトルがどのように混ざるか考える。

$$\begin{aligned}
 \langle 2a, *, * | V | *, *, * \rangle &= \underbrace{\langle *, * | f \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | *, * \rangle}_{\text{スピン部分}} \\
 &= \int dx_1 dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{[\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) - \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)]}_{x_1=x_2 \text{ で } 0} \\
 &\quad \delta(x_1 - x_2) \underbrace{g(x_1, x_2)}_{\text{適当な関数}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \langle 2s, 0, 0 | V | 1s, 0, 0 \rangle &= \langle 0, 0 | f \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | 0, 0 \rangle \\
 &= \int dx_1 dx_2 \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_1(x_1)\psi_2(x_2) + \psi_2(x_1)\psi_1(x_2)] \\
 &\quad \psi_1(x_1)\psi_1(x_2)\delta(x_1 - x_2) \\
 &= \sqrt{2} \langle 0, 0 | f \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | 0, 0 \rangle \int_{-a}^a \psi_1(x)^3 \psi_2(x) dx \\
 &= \frac{\sqrt{2}f}{a^2} \langle 0, 0 | \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2 | 0, 0 \rangle \int_{-a}^a \underbrace{\cos^3\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}_{\text{奇関数}} dx \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

より、以上 5 つの状態ベクトルから異なる 2 つを選んだ時、その行列要素 (V をはさんだもの) が 0 となるので、以上の 5 つの状態は V によって混ざらない。

専攻 問題 2 解答

1. (i) $T \rightarrow 0$ では $J > 0$ より、すべての磁気モーメントが同じ向きを向く向きでは磁場の向き
 $T \rightarrow \infty$ では、バラバラの向きを向く。
 (1 と -1 は同じ数)
- (ii) 全エントロピーは場合の数を W とすると $S = k \ln W$ より、 N 粒子とすると $T \rightarrow 0$ では状態は一つに定まり $S = 0$ 。よって、 $\frac{S}{N} = 0$
 $T \rightarrow \infty$ では、Stering の公式を用いて (但し N は十分大とする。)

$$S = \ln_N C_N^{\frac{N}{2}} = k \left(\ln N! - 2 \ln \left(\frac{N}{2}! \right) \right) \approx Nk \ln 2$$

よって $\frac{S}{N} = k \ln 2$

- (iii) $F = U - TS$ を最小にする状態が実現され、各々の極限でどうなるか考える。
 $T \rightarrow 0$ では $F \approx U$ でエネルギーつまり H の期待値を小さくすればよい。

$$H = -J \sum \sigma_i \sigma_j - h \sum \sigma_i$$

なので第 1 項は σ_i と σ_j が同じ方 (積が 1) 小さくなり第 2 項は h と σ_i が同じ方 (積が 1) が小さくなるので H を小さくするには全部同じ向きで、 h の方向だと最小になる。

$T \rightarrow \infty$ では、 $F \approx -TS$ となり、 S が大きくなるとよい。

$S = k \ln W$ (但し W は場合の数) で W が最大でが求める解であり、これは、1 と -1 が同じ数がでてくるバラバラの状態である。

2. (i)

$$H(\sigma_0) = (-6Jm - h)\sigma_0 \tag{1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \langle \sigma_0 \rangle &= \frac{\sum_{\sigma_0=\pm 1} \sigma_0 e^{-\beta H(\sigma_0)}}{\sum_{\sigma_0=\pm 1} e^{-\beta H(\sigma_0)}} = \frac{e^{-\beta H(\sigma_0)} - e^{+\beta H(\sigma_0)}}{e^{-\beta H(\sigma_0)} + e^{+\beta H(\sigma_0)}} \\ &= \tanh(-\beta H(\sigma_0)) = \tanh(\beta(6Jm + h)) = \tanh \frac{6Jm + h}{kT} \end{aligned}$$

- (ii) $\langle \sigma_0 \rangle = m$ より

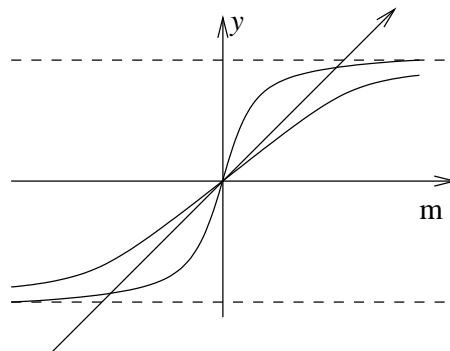
$$m = \tanh \frac{6Jm + h}{kT}$$

である。

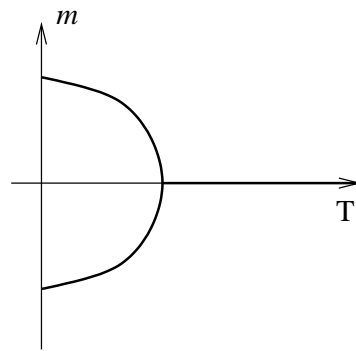
- (iii) $h = 0$ より

$$\begin{cases} y = m \\ y = \tanh \frac{6Jm}{kT} \end{cases}$$

の交点が m の解である。



ある T_c を境に $m \neq 0$ の解が現れる。
 $T_c < T$ で $m = 0$
 $T \rightarrow 0$ では $\tanh \frac{6Jm}{kT} \rightarrow \pm 1$ より
 $m \rightarrow \pm 1$
 よってグラフは右のようになる。



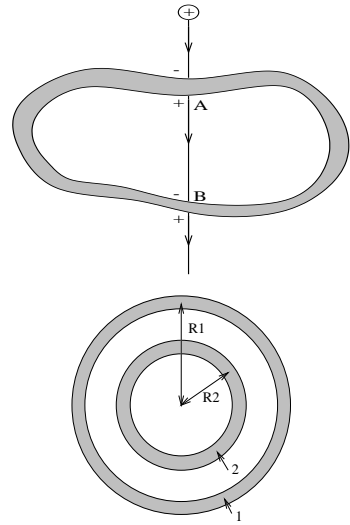
(iv) (ii) より、 $h = 0$ に対して、 $m \neq 0$ なる解が存在する。 $T = T_c$ では、 $\tanh 6\beta Jm$ の $m = 0$ における傾きが 1
 なので、

$$T_c = \frac{6J}{k_B}$$

である。

専攻 問題 3 解答

1. (i) 中空の空間には電荷が存在しない ($\rho = 0$) ので、1 より $\text{div } \vec{E} = 0$ 。
 従って、中空の空間には電場の湧き出しやすいこみがなく、中空の空間に電場が侵入するとすれば、電気力線は右図のように導体内側表面の 2 点 A、B を結ぶことになる。
 すると、2 点 A、B の間に電位差が生じることになるが、これは導体の各部分の電位が等しいことに反する。
 よって、中空の空間には電場は侵入できない。
 (ちなみに、導体の各部分の電位が等しいことは、電荷の移動が終了した状態では導体内部に電場が存在しないということから結論される)
- (ii) (i) より、導体球 1 の中空の空間には電場が侵入できないので、導体球 1 と導体球 2 の電位は等しいはずである。よって、導体球の外に置いた電荷の位置や量を変えても、導体球 1 と 2 の間の電位差が常に 0 であることを確かめればよい。



2. (i) S を任意の閉曲面、 V を S の内部の領域として、電荷保存則は

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad \dots (1)$$

定常電流の時は

$$\int_S \vec{j} \cdot \vec{n} dS = 0$$

が成立するが、非定常電流の時は

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \frac{d}{dt} \int_V \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{d}{dt} \int_S \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_S \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{n} dS \quad \dots (2)$$

2 を 1 に代入して

$$\int_S \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS = 0$$

が成立する。

従って、定常電流のときの Ampère の法則

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_{S'} \vec{j} \cdot \vec{n} dS \quad \dots (3)$$

を非定常電流の場合に一般化するには、

$$\vec{j} \rightarrow \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

と置き換えて、

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 \int_{S'} \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS \quad \dots (4)$$

とすればよい。Stokes の定理より

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{r} = \int_{S'} \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS$$

であるから、4 は

$$\int_{S'} \nabla \times \vec{B} \cdot \vec{n} dS = \int_{S'} \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot \vec{n} dS$$

となる。 S' は任意なので

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

これで、4 が導かれた

- (ii) 局所的な \vec{j} が一瞬生じると、4 によって近傍に \vec{B} が生じ、 \vec{B} の変化があるので 3 によって近傍に \vec{E} が生じ、 \vec{E} の変化があるので、再び 4 によって近傍に \vec{B} が生じる。 \vec{j} が消滅した後 2 も、引き続き 3,4 によって \vec{E}, \vec{B} の変化がそれぞれ近傍に \vec{E}, \vec{B} を生むので、電磁波のパルスが空間を伝わっていく。

- (iii) $\rho = 0, \vec{j} = 0$ のとき、Maxwell 方程式は

$$\text{div } \vec{E} = 0 \quad \dots (5)$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad \dots (6)$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \dots (7)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \dots (8)$$

となる。7 の rot をとると

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$$

を使って

$$\text{grad div } \vec{E} - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B})$$

これに 5,8 を代入すると

$$\nabla^2 \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \dots (9)$$

が得られる。同様に 8 の rot をとれば

$$\nabla^2 \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad \dots (10)$$

が得られる。

9,10 は波動方程式であるから、電磁場の存在が示された。位相速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

である。

- (iv) $\text{div grad} = 0$ であるから、2 より

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad \dots (11)$$

なるベクトル場 \vec{A} が存在することが分かる。

11 を 3 に代入すると

$$\text{rot } \vec{E} = -\text{rot } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0$$

ところが $\text{rot grad} = 0$ であるから

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi$$

なるスカラー場 ϕ が存在することが分かる。

専攻 問題 4 解答

1. 波長 λ と周波数 ν とは、 $c = \lambda\nu$ の関係にある。そして、エネルギー E は $E = h\nu$ から計算できる。

	波長	周波数	エネルギー	名称
A	3.75 [m]	80 [MHz]	3.2×10^{-7} [eV]	超短波
B	500 [nm]	600 [THz]	2.4 [eV]	可視光
C	12 [pm]	2.5×10^{19} [Hz]	100 [keV]	γ 線

[補足] B は電波と書けば充分かもしれない。折角なので理科年表から国際電気通信条約無線規則による電波の名称を挙げておこう。

波長 [m]	$10^{-4} \sim$	$10^{-3} \sim$	$10^{-2} \sim$	0.1 ~	1 ~	10 ~	100 ~	$10^3 \sim$	$10^4 \sim$	$10^5 \sim$
名称	サブミリ	ミリ	センチ	極超短	超短	短	中	長	超長	
略号		EHF	SHF	UHF	VHF	HF	MF	LF	VLF	

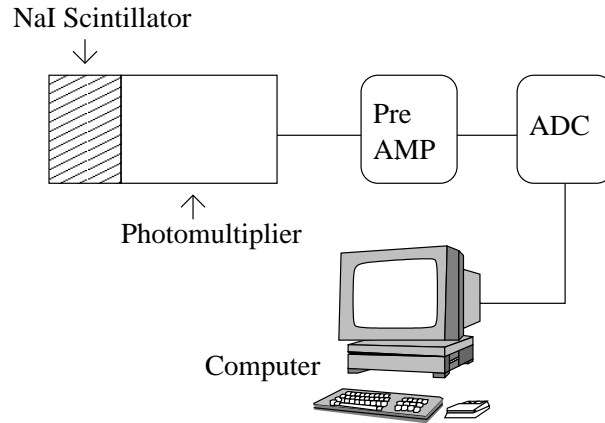
UHF, VHF はテレビをアンテナに繋ぐときに良く聞くでしょ? でも H って何の略なんだろ?

2. 可視光を発生する現象を挙げればよい。もちろんいろいろある。

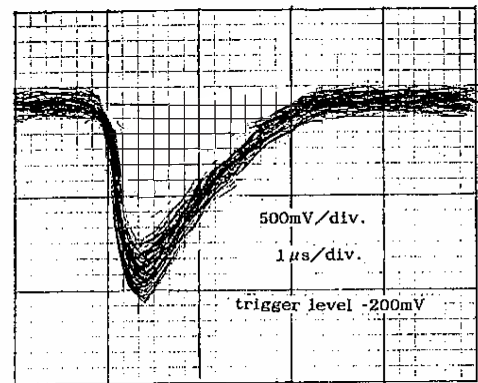
- 白熱球
電流により加熱されたフィラメントの熱放射による発光。
- 蛍光灯
蛍光管中を流れる電子によって励起されたガスの蛍光により蛍光管の内側に塗られた蛍光体が励起されて起きる発光。フォトルミネッセンスの一つ。
- 発光ダイオード
順バイアスで生じる、正孔と電子の結合によって励起状態になった原子が基底状態に戻る時の発光。エレクトロルミネッセンスの一つ。
- 可視光レーザー
離散的な準位を持つ系で、周りからエネルギーを与え、電子を励起させる。励起した電子が低いエネルギー状態に移るとき、そのエネルギー差に相当する周波数の光を放出する。
- Na ランプ
ランプの中に Na などの薄い蒸気を入れておく。ランプのフィラメントから発生する熱電子を電場を掛けて加速する。熱電子がある一定のエネルギー以上になって Na 原子に当たると束縛電子が励起される。その電子が再び基底状態に落ちるときに可視光領域の光を放つ。

3. 計測したい電磁波は γ 線であり、光源は微弱であり、しかもそのエネルギーを精度よく測定したいから、NaI シンチレータなどを用いるのがよい。

- NaI シンチレータの原理
NaI は Na の結晶に微量の TI を混入する。TI がイオン化によって生じた電子を捕え、その電子が励起状態から基底状態に落ちるときに発光する。
- 実験の全体の構成
シンチレータでの発光を光電子増倍管に入れる。フォトカソードに当たった光子は 10~20% の効率で光電子を放出する。管内の電場で加速された光電子は第 1 段のダイノードに衝突し、入射電子 1 個に対して 3~4 個の電子を光電効果により叩き出す。以下、この過程を繰り返し、ダイノードが 14 個あるとすれば、最終的にはだいたい 2×10^8 に増幅された電子パルスを得る。この電子パルスを AMP を通して ADC に入力して、その出力を computer に入力する。



4. いわゆる「電波」なのでアンテナを作ればよい。適当なコードやケーブル、つまり電線をぐるぐる巻いてループアンテナを作るのがよいと思われる。波長が数メートルなので直径 30cm ぐらいで 10 回ぐらい巻けば十分実用性がある。ループアンテナだと軸方向に指向性があるので電波源を探すのに都合が良い。アンテナからの出力は、ダイオードで整流して電流計につなぐか、オシロスコープでみる。電波が微弱であるときは整流して平滑してオペアンプで増幅させれば良い。
5. 実験室を金属で覆い静電遮蔽すれば良い。電磁波の波長より短い金網で十分である。もしも、電波源が小さいのであればそれ自体を覆った方が楽である。実験室と同じ建物内といているのだから、コンピュータであるうが、ノイズがテレビの電波であったりして、偏光方向が分かっているのなら、全てを覆わなくても、偏光方向に垂直になるように金属でスリットを作れば良い。テレビの電波は垂直に偏光しているの、波長よりも十分短い間隔で水平にスリットを作れば大体の電磁波は吸収できる。
6. 信号の多い箇所が 2 つある。ピークの高い方が γ 線の光電効果による吸収に相当し、低い方は主にコンプトン散乱で、後方散乱や自然放射線、除ききれなかったノイズもあるだろう。
 コンプトン散乱によるパルスを除くには、ディスクリミネーターをフォトマルと ADC の間に入れると良い。ディスクリミネーターはスレッシュホールド以下の電圧の信号を除くので、スレッシュホールドの値を適切に調整すれば、光電効果によるパルスだけを取り出すことが可能である。光電ピークがぼけているのは γ 線自体の広がり、およびフォトマルに掛る電圧が十分安定していないことによる。十分にウォームアップさせて回路を安定化させることが第一の対策である。



図：オシロスコープで見た信号波形。

専攻 問題 5 解答

1. (i)

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} + \kappa \sigma \text{grad } T$$

より、電流が流れなくなったときに、導線には

$$\vec{E} = -\kappa \text{grad } T$$

の電場が生じていると考えて、

$$\Delta V = \int E dx = \int -\kappa \text{grad } T = \kappa \Delta T$$

従って、

$$\Delta V = \kappa \Delta T$$

の熱起電力が生じる。

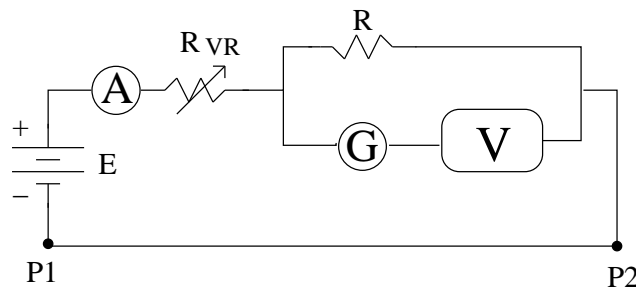
次に熱起電力が発生する理由を、電子の挙動を考慮して説明する。

温度勾配によって電子が高温側から低温側に流れるために電流が生じる。そのために電子が低温側に集まり、それらの電子による電場(高温 → 低温)が生じる。この電場は電子を高温側に戻す方向にできるため、ある程度低温側に電子が行くと、それ以上低温側に電子が流れなくなる。そのときの電子密度差による電場で熱起電力が発生する。

(ii) 前問の議論から、金属が違えば熱起電力が異なることは明らかである。従って、2つの金属の熱起電力の電位差を打ち消すために定常電流が流れていなければならない。

2. (i) ●原理

測定回路を書き直しておく。



図の V は金属導線 M,N による熱起電力差である。熱起電力と温度との関係は既知であるから V が分かれば良い。いま、検流計に流れる電流が 0 になるように可変抵抗を調節すれば、電流計で電流 i を計ることで $V= Ri$ の関係より熱起電力差が求められる。

●利点

- 電流計の値を読むだけで測定が行えるので簡単かつ正確。(可変抵抗の値や、金属 M,N の抵抗値が分からなくても良い。)
- 熱電対に電流が流れないので、熱電対にジュール熱が発生せず、試料の温度が変化しにくい。
- 電流計を流れる電流を I 、検流計を流れる電流を i とする。また、熱電対の金属 M の抵抗値を r_M 、金属 N の抵抗値を r_N 、測定したい熱電対の電位差を V_{th} とおくと、

$$V_{th} = R(i + I) + (r_M + r_N)i$$

より R が十分大きいので、

$$\left| \frac{r_M + r_N}{R} \right| \ll 1$$

$$i \rightarrow i + \Delta i, I = 0 + \Delta I$$

としたとき、

$$V_{th} \sim Ri + R(\Delta i + \Delta I)$$

従って、誤差が評価しやすい。

– R が十分大きいので導線による電圧降下が無視できる。また、電流も小さくなるので回路で熱が発生しにくい。

(ii) T_1 を既知の温度にしておけば良い。(例えば水の 3 重点)

- (iii)
- 抵抗 R の精度
 - 検流計と電流計の精度
 - 試料と熱電対の断熱の具合。(等温になっていなければならない。)

専攻 問題 6 解答

1. 水の誘電分極
2. 位置 r の静電ポテンシャルは $\phi(r)$ だから、この点でイオンが電荷 $Z_i q$ を持つ確率は Boltzmann 分布

$$e^{-Z_i q \phi(r) / kT}$$

に従う。それゆえ、位置 r での第 i 種イオンの密度は

$$n_i \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right]$$

となる。それゆえ、電荷密度は

$$\rho(r) = \sum_i n_i Z_i q \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right].$$

これと Poisson 方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{\rho(r)}{\varepsilon}$$

より、件の Poisson-Boltzmann 方程式

$$\nabla^2 \phi(r) = -\frac{1}{\varepsilon} \sum_i n_i Z_i q \exp\left[-\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right]$$

を得る。

3. 溶液全体は電氣的に中性だから、

$$\sum_i n_i Z_i q = 0.$$

となる。さらに、

$$\left|\frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right| \ll 1$$

となることに注意して、

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi(r) &\approx -\frac{1}{\varepsilon} \sum_i n_i Z_i q \left[1 - \frac{Z_i q \phi(r)}{kT}\right] \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \sum_i n_i Z_i q + \frac{q^2}{\varepsilon kT} \phi(r) \sum_i n_i Z_i^2 \\ &= \frac{q^2}{\varepsilon kT} \sum_i n_i Z_i^2 \phi(r) \\ &= \kappa^2 \phi(r) \end{aligned}$$

を得る。

4. 球対称であるから、 $\phi(r) = \phi(r)$. この時、方程式は

$$\nabla^2 \phi(r) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right)$$

を使って

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi(r)}{dr} \right) = \kappa^2 \phi(r).$$

一般に中性ではあっても媒質中を荷電粒子が運動する場合、周囲の電荷を引きずっているために余分に質量を纏っているように見える。これは電磁相互作用を運ぶ光子についても同様で、ポテンシャルは質量を持った光子によって媒介されるように見える。これは Yukawa 型相互作用だから、方程式を最初から解かずに、

$$\phi(r) = a \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

とおくことができる。ここで、 $a \propto Z_0, \alpha > 0$ である。これを方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{r} &= \kappa^2 a \frac{e^{-\alpha r}}{r} \\ \alpha^2 &= \kappa^2 \\ \alpha &= \kappa. \end{aligned}$$

を得る。更に、上の述べた考察により、 $n_i \rightarrow 0$ のとき、イオンの衣による遮蔽効果は小さくなり、 $\phi(r)$ は Coulomb 相互作用に近づく。つまり、

$$\phi(r) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Z_0}{r}.$$

であるから、これにより、

$$a = \frac{Z_0}{4\pi\epsilon}$$

がわかる。まとめると、

$$\phi(r) = \frac{Z_0}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-\kappa r}}{r}.$$

$n_i \rightarrow 0$ のとき、 $\kappa \rightarrow 0$ であって、

$$\phi(r) \rightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Z_0}{r}$$

となり、Coulomb 相互作用になる。

5. 上の考察から、

$$\begin{aligned} \phi_0(r) &= \frac{Z_0}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \\ \phi(r) &= \frac{Z_0}{4\pi\epsilon} \frac{e^{-\kappa r}}{r} \\ \frac{\phi(r)}{\phi_0(r)} &= e^{-\kappa r}. \end{aligned}$$

それゆえ、Debye 長は

$$\begin{aligned} r_D &= \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{\frac{q^2}{\epsilon k T} \sum_i n_i Z_i^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{2q^2}{\epsilon k T}}} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2} \sum_i n_i Z_i^2}} \\ &\approx 8.18 \times 10^{-10} \approx 8.2 \text{ \AA} \end{aligned}$$

6. イオン強度を下げていくと

$$r_D \propto \frac{1}{\sqrt{\text{イオン強度}}}$$

であるから、 r_D は大きくなる。ここで、生理条件下では $r_D \approx 8.2 \text{ \AA}$ で、DNA のリン酸基の間隔は 10 \AA 程度であるから、イオン強度を下げていくと容易に Debye 長は 10 \AA よりも大きくなり、互いに反発力を及ぼし、DNA は不安定になる。それゆえ、DNA が熱融解する温度は下がると期待される。

7. ●イオンの大きさ

Debye-Hückel の理論ではイオンの大きさを無視して方程式を解いたが、実際はイオンは数Å程度の大きさを持つのでイオンの占めることができる空間的領域は制限される。

●熱力学的要素

Debye-Hückel の理論はイオン同士の静電エネルギーのみを考慮したが、実際はエントロピーとエネルギーの兼ね合いによって構造が決まる。つまり、Gibbs 自由エネルギーが最小になるように原子が配置される。

●水素結合、van der Waals 相互作用

分子を構成している原子間の電気陰性度の差により偏極がおこり、そのために水素結合や van der Waals 力が働き立体構造を変化させる。なお、この力は分子を構成する原子のうち、互いに接近した組に対して働く。

専攻 問題 7 解答

1. (i) 1 個の高分子は図 1 の様に力を受けるので、運動方程式は

$$m\ddot{x} = \underbrace{mg}_{\text{重力}} - \underbrace{\beta\dot{x}}_{\text{抵抗}} - \underbrace{\rho\mu g}_{\text{浮力}}$$

となる。ただし、

$$m: \text{高分子 1 個の質量} = \frac{M}{N_A}$$

$$\mu: \text{高分子 1 個の体積} = mV = \frac{MV}{N_A}$$

で、これを上の式に代入すると

$$\frac{M}{N_A}\ddot{x} = \frac{M}{N_A}g - \beta\dot{x} - \rho g \frac{MV}{N_A} \quad \dots (1)$$

となり、これが答え。

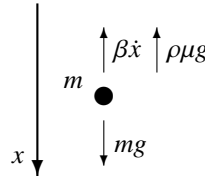


図 1: 高分子の受ける力

(注)...単位系は CGS 単位系を考えた。(すると、 N_A 個で質量 $M[\text{g}]$ となり上の様な式になる)。もし MKS 単位系にしたいならば、 M の代わりに $M/1000$ とすれば良い。

- (ii) $\dot{x} = s$ (一定) の時、 $\ddot{x} = \dot{s} = 0$ より式 (1) は

$$0 = \frac{M}{N_A}g - \beta s - \rho g \frac{MV}{N_A} = \frac{Mg(1 - \rho V)}{N_A} - \beta s \quad \text{となる。よって、}$$

$$s = \frac{Mg(1 - \rho V)}{\beta N_A} \quad \dots (2)$$

となり、これが答え。今回の問題では「試験管の上部では薄く、底部では濃くなる」とあり、 s は正の値だとわかるので、以下 s が正であるとする。

2. (i) $j(x, t)$ の符号が正となる向きと、 D が正の定数であることを踏まえて、(濃度の高い方から低い方へ拡散は起きる)

$$j(x, t) = \underbrace{sC(x, t)}_{\text{上から流れて来る分}} - \underbrace{D\frac{\partial}{\partial x}C(x, t)}_{\text{拡散して広がる分}} \quad \dots (3)$$

- (ii) 粒子数保存より

$$\frac{\partial}{\partial t}C(x, t) + \frac{\partial}{\partial x}j(x, t) = 0 \quad \dots (4)$$

(マクスウェル方程式から出る電荷保存則

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \text{div } j = 0$$

の 1 次元バージョン)

(iii) 式 (4) の $j(x, t)$ に式 (3) を代入すると (s は x や t に依らない定数)、

$$\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) + s \frac{\partial}{\partial x} C(x, t) - D \frac{\partial^2}{\partial x^2} C(x, t) = 0 \quad \dots (5)$$

となりこれが答え。

(iv) 高分子が重力によって下へ落ちてゆくため、時間が経つごとに上の方は濃度が低くなって下の方は濃度が高くなってゆき、上と下で濃度差が広がってゆくが、濃度差があると拡散が起きて高濃度の方から低濃度の方へ高分子が流れてゆくので幾らかの高分子は上へ戻される。濃度差が大きくなると上の高分子の数が減るので下に落ちる量が減るのに対し、拡散は濃度差が大きいくほど強くなるので上に戻される量が増えるので、ある濃度差になった時点で収支が平衡状態となり、そこで定常状態となる。

(v) 定常状態の時 $\frac{\partial}{\partial t} C(x, t) = 0$ より、 $C(x, t) = C(x)$ として、式 (5) は

$$sC'(x) - DC''(x) = 0 \quad (\prime \text{ は } x \text{ に関する微分})$$

となる。 $C'(x) \equiv f(x)$ として、前の式は

$$f'(x) = \frac{s}{D} f(x)$$

となるので、これを解くと

$$f(x) = A'e^{\frac{s}{D}x} \quad (A' \text{ は適当な定数})$$

となり、これを x で積分すると

$$C(x) = Ae^{\frac{s}{D}x} + B \quad (A, B \text{ は適当な定数})$$

となる。さて、この $C(x)$ を (3) 式 (3) に代入すると

$$j(x) = s(Ae^{\frac{s}{D}x} + B) - D \frac{s}{D} Ae^{\frac{s}{D}x} = sB$$

となるが、 $x=0$ は液面で上から高分子は流れてこないのので、 $j(0)=0$ でないと $C(0)$ が減っていってしまい、定常状態ではない。よって $sB = 0$ で $s \neq 0$ より $B = 0$ となる。

よって、 $C(x) = Ae^{\frac{s}{D}x}$ なので、

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{C(x_1)}{C(x_2)} = \frac{Ae^{\frac{s}{D}x_1}}{Ae^{\frac{s}{D}x_2}} = e^{\frac{s}{D}(x_1-x_2)}$$

となり両辺 \log をとって、

$$\log \frac{C_1}{C_2} = \frac{s}{D}(x_1 - x_2) \quad \frac{s}{D} = \frac{\log \frac{C_1}{C_2}}{x_1 - x_2} \quad \dots (6)$$

となるので、 C_1, C_2, x_1, x_2 がわかれば s/D が求められることがわかる。

(vi) $s = \frac{Mg(1-\rho V)}{\beta N_A}$, $D = \frac{k_B T}{\beta}$ より、

$$\frac{s}{D} = \frac{\frac{Mg(1-\rho V)}{\beta N_A}}{\frac{k_B T}{\beta}} = \frac{Mg(1-\rho V)}{N_A k_B T} \quad \text{となる。}$$

よって、

$$M = \frac{N_A k_B T}{g(1-\rho V)} \frac{s}{D} \quad \dots (7)$$

となり、(7) 式の右辺は s/D の他はすべて計測可能な量なので、 s/D がわかれば M が求められることがわかる。

専攻 問題 8 解答

1. 電子は本来金属イオンの作る周期場、他の電子からのクーロン力等により複雑な運動をするが、それらの電子を理想フェルミ気体として扱うのが金属に対する自由電子模型である。

電子は一辺 L の箱に閉じ込められているとする。シュレディンガー方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r})$$

境界条件は

$$\psi(0, y, z) = \psi(L, y, z) = 0 \quad (y \text{ と } z \text{ についても同様})$$

である。この解は

$$\psi(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$$

ただし、

$$k_x = 0, \pm \frac{2\pi}{L}, \pm \frac{4\pi}{L} \dots \quad (k_y, k_z \text{ についても同様})$$

従って \mathbf{k} 空間の体積要素 $(\frac{2\pi}{L})^3$ 当たりにはただ一つの状態が存在する。

さて、フェルミ分布関数は

$$f_r = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon - \mu)} + 1}$$

で与えられる。ここで電子の総数 N は、スピンの自由度による因子 2 も考慮に入れれば

$$N = \frac{2}{(\frac{2\pi}{L})^3} \int f_r d^3k = \frac{2V}{(2\pi)^3} \int f_r d^3k$$

とできる。

いま、金属において自由電子模型ならば、室温程度は事実上の絶対零度となる。よって $T \rightarrow 0$ の極限をとる。この時

$$f_r = \begin{cases} 0 & \epsilon > \mu \\ 1 & \epsilon < \mu \end{cases}$$

ここで f_r が不連続になる μ をフェルミエネルギー ϵ_F と呼ぶ。

フェルミ波数 k_F を $\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}$ によって導入すれば

$$\begin{cases} k < k_F \text{ で } f_r = 1 \\ k > k_F \text{ で } f_r = 0 \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{aligned} N &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int f_r d^3k \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \int_{k < k_F} d^3k \\ &= \frac{2V}{(2\pi)^3} \frac{4\pi}{3} k_F^3 \\ &= \frac{V k_F^3}{3\pi^2} \end{aligned}$$

よって

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} \quad (n = \frac{N}{V} : \text{数密度})$$

従って最終的に

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (3\pi^2 n)^{\frac{2}{3}}$$

としてフェルミエネルギーが求まる。つまりフェルミエネルギーは電子の数密度によって決定される。

2. 1 で求めた式に値を代入する。

$$n = \frac{\text{電子の個数}}{\text{体積}} = \frac{Na \text{ の個数}}{\text{体積}} = \frac{6.02 \times 10^{23}}{\frac{23\text{g}}{0.97\text{g/cm}^3}}$$

によって

$$k_F = (3\pi^2 n)^{\frac{1}{3}} = 0.91 \text{\AA}^{-1}$$

よって

$$\epsilon_F = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{1}{2} \left(\frac{\hbar^2}{me^2} \right)^2 \frac{me^4}{\hbar^2} k_F^2 = 3.2 \text{ eV}$$

となる。

3. 理由として

- 金属原子核との弾性散乱
- 金属電子によるクーロン散乱
- 制動放射

が考えられる。

4. 対消滅後の光子のエネルギーを E_1, E_2 とする。4 元運動量保存の式を立てると

$$E_1 + E_2 = 2mc^2 \quad \dots (1)$$

$$\frac{E_1}{c} \cos \theta - \frac{E_2}{c} \cos(\theta + \Delta\theta) = mv \quad \dots (2)$$

$$\frac{E_1}{c} \sin \theta - \frac{E_2}{c} \sin(\theta + \Delta\theta) = 0 \quad \dots (3)$$

ここで運動エネルギー $\frac{1}{2}mv^2$ は mc^2 に比べて十分に小さいので無視した。

$\Delta\theta \ll 1$ として

$$(2) \rightarrow E_1 \cos \theta - E_2 \cos \theta + E_2 \sin \theta \Delta\theta = mcv \quad \dots (4)$$

$$(3) \rightarrow E_1 \sin \theta - E_2 \sin \theta - E_2 \cos \theta \Delta\theta = 0 \quad \dots (5)$$

(4) $\times \sin \theta$ - (5) $\times \cos \theta$ より

$$E_2 \Delta\theta = mcv \sin \theta \quad \dots (6)$$

(4) $\times \cos \theta$ + (5) $\times \sin \theta$ より

$$E_1 - E_2 = mcv \cos \theta \quad \dots (7)$$

(1) と (7) より

$$E_2 = mc^2 - \frac{1}{2}mcv \cos \theta \quad \dots (8)$$

(6) と (8) より

$$(mc^2 - \frac{1}{2}mcv \cos \theta) \Delta\theta = mcv \sin \theta \quad \dots (9)$$

$v\Delta\theta$ の項は無視して、結局

$$\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin \theta \quad \dots (10)$$

となる。

5. $\Delta\theta = \frac{v}{c} \sin \theta$ において、ある θ に対する $\Delta\theta$ を測定できれば電子の速度 v が求まる。全ての θ に対して $\Delta\theta$ を測定していき求めた v の中で最大のものを v_{max} とするとフェルミエネルギー ϵ_F は $\epsilon_F = \frac{1}{2}mv_{max}^2$ となる。よって $\Delta\theta$ を測定することで金属のフェルミエネルギーを知ることが出来る。
6. 伝導電子や外殻の電子と遭遇し、そこで対消滅してしまうから。